بعض الملاحظات من البنى الجبرية1

1-**زمرة الجمع بالمقاس n: Z_n** عناصرها $Z_n = \{0,1,2, \dots (n-1)\}$ مثال:

$$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$$

2-زمرة الضرب بالمقاس $U(n)$: $U(n) = \{m: m \in N^* \}$ حيث n وm أوليان فيما بينهما مثال:

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

3-**القاسم المشترك الأعظم:رمزه gcd:**

*اذا كان العددين mوn أوليان فيما بينهما فإن $gcd(n,m) = 1$

**لايجاد القاسم المشترك الاعظم لعددين نحللهما الى عواملهما الاولية وناخذ العناصر المشتركة باصغر أس

4-**المضاعف المشترك الأصغر:رمزه Icm:**

لايجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين نحللهما الى عواملهما الاولية وناخذ العناصر المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس أمثلة: $Icm(12,24) = 2^3.3 = 24$ $gcd(12,24) = 2^2.3 = 12$ $gcd(9,5) = 1$

5- الزمرة $\langle a \rangle$ في Z_n نقوم بضرب العنصر a بعناصر Z_n بالمقاس n (أي نأخذ الباقي)

مثال:$\langle 4 \rangle$ في Z_8 :

$$Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\langle 4 \rangle = \Bigg\{\underbrace{4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5, 4 \times 6, 4 \times 7}_{mod\ 8}\Bigg\}$$

$\langle 4 \rangle = \{0,4\}$ لانضع العنصر المكرر

ملاحظة:حتى تكون $\langle a \rangle$ مولدة لـ Z_n يجب أن يكون $\gcd(n,a) = 1$ مثال: في الزمرة Z_8 العناصر المولدة هي:

1,3,5,7لأنها أولية مع 8

انتبه: nZ تختلف عن Z_n

$$3Z = \{0 \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots \dots ..\}$$

حلقة غير منتهية

أما Z_n فهي منتهية

ملخص مقرر البنى2

هام للصح والخطأ:

1-الحلقة الواحدية:نقول عن حلقة Rأنها واحدية اذا حوت على عنصر حيادي بالنسبة للضرب ورمزه e(أي من أجل أي عدد من الحلقة اذا ضربناه بالحيادي ينتج نفسه)

$$a \in R \quad ae = ea = a$$

مثال: $(Z,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$, $(Q,+,\cdot)$, $(C,+,\cdot)$ حلقات واحدية وواحدها هو 1

$nZ\ ;\ n > 1$:ليست واحدية

-الحلقة $R = \{0,2,4,6,8\}$بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10 هي واحدية والحيادي هو 6 لأن

$\cdot\ mod\ 10$	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	2
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

2-الحلقة الجزئية:نأخذ عنصرين من الحلقة الجزئية S يجب أن يكون طرحهما وضربهما ينتميان لـ S أي:

$$a, b \in S \quad 1)\ a.b \in S \quad 2)\ a - b \in S$$

مثال: $-$ $(Z,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Q,+,\cdot)$و $(R,+,\cdot)$ و$(C,+,\cdot)$

$-$ nZ حلقة جزئية من Z

$-$ mZ حلقة جزئية من الحلقة nZ حيث m من مضاعفات n

$-$ $8Z$ حلقة جزئية من Z و $2Z$ و $4Z$

3-القاسم في الحلقة:نقول عن عنصر aأنه قاسم للصفر اذا كان جداءه مع عنصر أخر bمن الحلقة يساوي الصفر

$a.b = 0$ و $a, b \neq 0$

مثال: $(Z_6,+,\cdot)$ تحوي قواسم الصفر لأن $2.3 = 6\ mod\ 6 = 0$

$(Z_{12},+,\cdot)$ تحوي قواسم الصفر لأن $4.3 = 12\ mod\ 12 = 0$

$(Z_{11},+,\cdot)$ لا تحوي قواسم الصفر فهي تامة

الحلقة التامة:نقول عن حلقة أنها تامة اذا كانت لا تملك قواسم للصفر

مثال: Z حلقة تامة لأنها لا تملك قواسم للصفر

$(Z_p,+,\cdot)$ حيث p عدد أولي هي حلقة تامة

المنطقة التكاملية:هي حلقة تبديلية وواحدية وتامة(لاتملك قواسم للصفر)

مثال:Zمنطقة تكاملية - $(Z_p,+,\cdot)$ حيث p عدد أولي منطقة تكاملية- $(Q,+,\cdot)$و $(R,+,\cdot)$ و$(C,+,\cdot)$ مناطق تكاملية

$(Z_{20},+,\cdot)$ليست منطقة تكاملية لأنها تملك قواسم للصفر $4.5=0$

المقلوب:نقول عن العنصر cأنه مقلوب العنصر a اذا كان $ac=ca=1$ يساوي الحيادي ونرمز له بالرمز a^{-1} حيث

$a,c\neq 0$

مثال: الحلقة $(Z_6,+,\cdot)$ مقلوب العنصر 5 هو 5 لأن $5.5=25mod6=1$

الجسم:كل عنصر من الحلقة مغاير للصفر يملك مقلوب

الحقل:هو جسم تبديلي

أمثلة: $(Q,+,\cdot)$و $(R,+,\cdot)$ و$(C,+,\cdot)$ مناطق تكاملية وحقول

$(Z,+,\cdot)$ منطقة تكاملية وليست حقل لأن ليس كل عنصر في Z مغاير للصفر له مقلوب(هامة)

$(Z_p,+,\cdot)$ حيث p عدد أولي هي حقل

$(Z_{11},+,\cdot)$ و $(Z_7,+,\cdot)$ و $(Z_{23},+,\cdot)$ و $(Z_{19},+,\cdot)$ هي حقول

$(Z_{57},+,\cdot)$و$(Z_{51},+,\cdot)$و$(Z_{119},+,\cdot)$ليست حقول لأن 51 و 119 و 57 ليست أعداد أولية

المثاليةA:هي مجموعة جزئية من الحلقة وتحقق خواصها ولها شرطين:

$\forall a,b\in A\Rightarrow a-b\in A$ -1

$\forall a\in A\,,\forall r\in R\Rightarrow ra\in A$-2

مثال: عدد المثاليات الموجودة في Z_n هو عدد قواسم n

-في Z_8 قواسم الـ8 هي 2 و4 و 8 وبالتالي يوجد ثلاث مثاليات Z_8 و Z_4 و Z_2

$-(Q,+,\cdot)$ ليست مثالية في $(R,+,\cdot)$ وذلك لأن:

$$\frac{1}{2} \in Q , \sqrt{2} \in R \Rightarrow \frac{1}{2}.\sqrt{2} \notin Q$$

-الحلقة $A=\{0,2,4\}$ هي مثالية في الحلقة $(Z_6,+,\cdot)$ وذلك لأن:

$(\cdot)mod\ 6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	0	2	4
4	0	4	2	0	4	2

من الجدول المعطى نلاحظ:

$$\forall a \in A , \forall r \in Z_6 \Rightarrow ra \in A = \{0,2,4\}$$

ملاحظة هامة:في أي حقل لا يوجد سوى مثاليتين هما المثالية الصفرية والحقل نفسه

مثال: عدد المثاليات في حلقة الأعداد الصحيحة $(R,+,\cdot)$ غير منته:خطأ لأن R حقل وفي الحقل لايوجد سوى مثاليتين هما المثالية الصفرية والحقل نفسه أي عدد المثاليات 2

$(Z_p,+,\cdot)$ حيث p عدد أولي يوجد مثاليتين فقط هما Z_p , $\{0\}$

العمليات على المثاليات:

$$nZ+mZ=\gcd(n,m)Z \quad , \quad nZ\cap mZ=\text{lcm}(n,m)Z \quad nZ.mZ=(n.m)Z$$

مثال:اذا كانت $B=4Z$ و $A=6Z$ فإن $A.B=A\cap B$ خطأ وذلك لأن:

$$A.B=24Z \neq A\cap B=12Z$$

$5Z+2Z=7Z$ خطأ لأن 5 و2 أوليان فيما بينهما $\gcd(5,2)=1$ أي أن $5Z+2Z=Z$

ملاحظة : $nZ\cup mZ=nZ+mZ=\gcd(n,m)Z$

القسمة:لتكن R حلقة و B و A مثاليتين في R عندئذ:

$$A:B=\{x : x\in R \ ; Bx\subseteq A\}$$

يعني: نأخذ عناصر الحلقة ونضربها بالمقسوم عليه واذا كانت محتواة في المقسوم نأخذ العنصر

مثال:أوجد $6Z:3Z$ الحل: $6Z$ و $3Z$ مثاليتين في الحلقة Z عندئذ:

.	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	…..
$3Z$	0	$3Z$	$6Z$	$9Z$	$12Z$	$15Z$	$18Z$	……
الأحتواء في$6Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	……

اذا العناصر المحتواة في $6Z$ هي $\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\dots\}$ وهي عناصر $2Z$ ومنه نكتب

$$6Z:3Z = 2Z$$

نتيجة : أذا كانت $B \subset A$ عندئذ $A:B = R$

$$2Z:4Z = Z \quad , \quad 2Z:\{0\} = Z \;, \quad 3Z:6Z = Z$$

مثال:$2Z_8:\{0\}$ ؟

عناصر $Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ و عناصر $2Z_8 = \{0,2,4,6,8\}$ اذا:

.	0	1	2	3	4	5	6	7
$2Z_8$	0	$2Z_8$	$4Z_8$	$6Z_8$	$8Z_8$	$10Z_8$	$12Z_8$	$14Z_8$
الأحتواء في$\{0\}$	$\subseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$	$\subseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$	$\nsubseteq\{0\}$

اذا العناصر المحتواة في $\{0\}$ هي $\{0,4\}$ وهي عناصر $4Z_8$ ومنه نكتب

$$\{0\}:2Z_8 = 4Z_8$$

حلقة الخارج: $\boldsymbol{nZ/_{mZ}}$ عناصرها هي عناصر البسط **+**المقام أما اذا سأل عن عدد العناصر نقسم m على n

مثال:لتكن حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ لنوجد عناصرها وهل هي واحدية أم لا وهل هي حقل؟

الحل:نعلم أن : $2Z = \{0,\pm2,\pm4,\pm6\,\dots..\}$

$$0+6Z = 6Z \;\; ,2+6Z, \quad 4+6Z, \;\; 6+6Z = 0+6Z = 6Z$$

ومنه يوجد ثلاث عناصر هي $2Z/_{6Z} = \{6Z \;\; ,2+6Z \;\; ,4+6Z\}$

$(\cdot)mod6$	$0+6Z$	$2+6Z$	$4+6Z$
$0+6Z$	$0+6Z$	$0+6Z$	$0+6Z$
$2+6Z$	$0+6Z$	$4+6Z$	$2+6Z$
$4+6Z$	$0+6Z$	$2+6Z$	$4+6Z$

$$(2+6Z)(4+6Z) = (8+6Z) = (2+6Z)$$

نلاحظ أنها واحدية والحيادي فيها $4+6Z$ ولاتملك قواسم صفر فهي حقل

**حلقة الخارج $7Z/_{21Z}$تحوي ثلاث عناصر وليست واحدية وليست منطقة تكاملية لانها تملك قواسم للصفر

$$7Z/_{21Z} = \{0 + 21Z\ ,7 + 21Z\ \ ,14 + 21Z\}$$

$(\cdot)mod21$	$0 + 21Z$	$7 + 21Z$	$14 + 21Z$
$0 + 21Z$	$0 + 21Z$	$0 + 21Z$	$0 + 21Z$
$7 + 21Z$	$0 + 21Z$	$7 + 21Z$	$0 + 21Z$
$14 + 21Z$	$0 + 21Z$	$0 + 21Z$	$0 + 21Z$

العنصر الجامد: نقول عن العنصر a أنه جامد في الحلقة اذا كان $a^2 = a$

العنصرعديم القوى: نقول عن العنصر a أنه عديم القوى في الحلقة اذا كان $a^n = 0\ \ ;n \in N^*$

مثال:العنصر 3 عنصر عديم القوى في Z_{27} لأن $3^3 = 27 = 0$ وجد $3 \in N^*$

العنصر 4 جامد في الحلقة $(Z_{12}, +,\cdot)$ لأن $4^2 = 16mod12 = 4$

-**مميز** الحلقات الغير المنتهية هو الصفر

-مميز الحلقة $Z_n \oplus Z_m$ هو $Icm\ (n, m)$

مثال:مميز الحلقة $(nZ, +,\cdot)$ هو الصفر لأنها حلقة غير منتهية

مميز الحلقة $(5Z, +,\cdot)$ هو الصفر لأنها حلقة غير منتهية

ملاحظة هامة: $\boxed{Z/_{nZ} \cong Z_n}$

-ان حلقة الخارج $Z/_{6Z}$ هي حقل؟ خطأ لأنها ايزومورفيزمية مع Z_6 و Z_6 ليست حقل لأن 6 ليس أولي

(($\cong$ تعني انها لها نفس الصفات))

-$nZ \cong Z$؟ خطأ:لأن Z واحدية و nZ ليست واحدية من أجل $n > 1$ والعلاقة صحيحة من أجل $n = 1$

المثالية الأولية:لتكن R حلقة و A مثالية في R بحيث $A \neq R$ نسمي A مثالية أولية اذا تحقق :

$$1)A \neq R\quad ,2)\forall a, b \in R; a.b \in A \Rightarrow \text{اما } a \in A \text{ أو } b \in A$$

أمثلة: هل المثالية $A = \{0,4\}$ أولية في الحلقة Z_8؟

خطأ لأن $6 \notin A$ و $2.6 = 4 \in A \Rightarrow 2 \notin A$; $2,6 \in Z_8$

-إن المثالية $2Z \cap 5Z$ أولية في Z خطأ: لأن

$$2Z \cap 5Z = 10Z \quad 2.5 = 10 \in 10Z$$

لكن $2 \notin 10Z$ و $5 \notin 10Z$

-المثالية الصفرية$\{0\}$ أولية في الحلقة Z_8 خطأ لأن:

$$2.4 = 0 \in \{0\} \ : \ 2 \notin \{0\} \ \text{و} \ 4 \notin \{0\}$$

-المثالية الصفرية أولية في المناطق التكاملية

**المثالية الصفرية أولية في Z_7 صح لأن Z_7 منطقة تكاملية

نتيجة: $R/_A$ منطقة تكاملية $\Leftrightarrow$ A أولي

المثاليات الأعظمية: لتكن Lمجموعة المثاليات في الحلقة R بحيث $L \neq R$ نقول عن المثالي $A \in L$ انه اعظمي اذا كان A عنصر أعظمي في L.

ملاحظة هامة للفهم فقط: في الحلقة Z_n المثاليات الاعظمية الموجودة فيها هي قواسم n وأولية فيما بينها

مثال:المثاليات الأعظمية في Z_6 هي $\langle 3 \rangle$ و $\langle 2 \rangle$

$$\langle 3 \rangle = \{0,3\} \qquad \langle 2 \rangle = \{0,2\}$$

هل المثالية $\langle 4 \rangle$ أعظمية في Z_{24}؟

خطأ: لأن $\langle 4 \rangle = \{0,4,8,12,16,20\}$ و $\langle 2 \rangle = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$

نلاحظ أن $\langle 4 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$ في Z_{24} ومنه الاجابة خاطئة

أما اذا طلب عن المثاليات الاعظمية في Z_{24}فهي $\langle 3 \rangle$ و$\langle 2 \rangle$ أصغر قاسمين لها غير محتواتين في بعضهما

لا نأخذ $\langle 6 \rangle$ و$\langle 8 \rangle$ لأنهما محتواتين في $\langle 3 \rangle$و$\langle 2 \rangle$ ولا نأخذ الأعداد الأولية مع 24 لأنها تولدها

$$\langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle = \langle 17 \rangle = \langle 19 \rangle = \langle 23 \rangle = Z_{24}$$

مثال: هل المثالية$\langle 5 \rangle$ أعظمية في Z_{12}؟

نلاحظ أن ال5 أولي مع ال12 بالتالي $\langle 5 \rangle$ تولد Z_{12} فهي ليست أعظمية

أو: $\langle 5 \rangle = \{0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7\}$ نرتب عناصرها فنجد $\langle 5 \rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} = Z_{12}$

وبالتالي الأجابة خاطئة

مثال: $3Z \cap 2Z$ أعظمية في في Z خطأ لأن : $3Z \cap 2Z$ محتواة في $2Z$ وفي $3Z$

الحلقة الموضعية: تملك مثالي أعظمي واحد فيها

مثال: Z_8 حلقة موضعية لأنها تملك مثالي أعظمي هو $\langle 2 \rangle$

هل Z_6 حلقة موضعية: لا لأنها تملك مثاليتين أعظميتين هما $\langle 3 \rangle$و$\langle 2 \rangle$

نتائج:

1-كل حقل هو حلقة مثاليات رئيسية

2-Z هي حلقة مثاليات رئيسية وكل مثالي فيها من الشكل mZ

3-كل حقل هو حلقة نيوثرية

أمثلة:

$Z/_{3Z}$هي حلقة مثاليات رئيسية وذلك لأنها $Z_3 \cong Z/_{3Z}$ و Z_3 حقل وكل حقل هو حلقة مثاليات رئيسية

Q هي حقل وبالتالي هي حلقة مثاليات رئيسية

(Z نيوثرية وليست أرتينية بينما CوR و Q أرتينية ونيوثرية)

أذا كان e جامد و $(1-e)$ جامد في الحلقة R عندئذ Re و $R(1-e)$ هي حدود مباشرة في R

$$R = Re \oplus R(1-e)$$

مثال:في Z_6 العناصر الجامدة هي 4و3 عندئذ: $Z_6 = 3Z_6 \oplus 4Z_6$

مثال:أكتب $Z_{12}/_{6Z_{12}}$ على شكل مجموع مباشر

الحل: نعلم أن $6Z_{12} = \{0,6\}$ هي مثالية فيZ_{12} و

$$Z_{12}/_{6Z_{12}} = \{0+6Z_{12}, 1+6Z_{12}, 2+6Z_{12}, 3+6Z_{12}, 4+6Z_{12}, 5+6Z_{12}\}$$

نلاحظ أن العنصرين 4و9 جامدين في Z_{12} عندئذ:

$$Z_{12}/6Z_{12} = (4Z_{12} + 6Z_{12})/6Z_{12} \oplus (9Z_{12} + 6Z_{12})/6Z_{12}$$

تعاريف:

$\mathfrak{J}(\boldsymbol{R})$**أساس جاكبسون**:هو تقاطع جميع المثاليات اليسارية الأعظمية في الحلقة R ونرمزه بالرمز $Rad\ R = \mathfrak{J}(R)$

2- $\boldsymbol{rad}\ (\boldsymbol{R})$ الأساس الأولي للحلقةR:هو تقاطع جميع المثاليات الأولية في الحلقة R.

3-$rad\ \boldsymbol{A}$ أو $\sqrt{A}$ جذر المثالي A أو أساس A:لتكن Rحلقة وليكن A مثالي في R ان مجموعة العناصر a في R التي تحقق من أجلها $n \in Z^{+*}$ حيث $a^n \in A$ يسمى بجذر المثالي A :

$$rad\ A = \sqrt{A} = \{a \in R; \exists n \in Z^{+*}; a^n \in A\}$$

أوجد أساس جاكبسون لـ Z_6: الحل: نعلم أن المثاليات الأعظمية في Z_6 هي $\langle 2 \rangle$و $\langle 3 \rangle$ ومنه :

$$\mathfrak{J}(R) = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle$$

تم بعون الله الانتهاء من القسم العملي مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

اعداد الزميل حسين علي

http://math.jw.lt

the end

مبرهنات في البنى الجبرية2

1-**كل ساحة صحيحة منتهية تشكل حقلاً:**

البرهان: لتكن R ساحة صحيحة ولنبرهن أن كل عنصر في R مغاير للصفر يملك مقلوب ليكن $0 \neq a \in R$عندئذ:

*اذا كان $a = 1$ فإن $a^{-1} = 1$ وبالتالي a يملك مقلوب

**بفرض $a \neq 1$ عندئذ $a, a^2, a^3, \ldots . . \in R$ وبما ان الحلقة R منتهية يوجد $i.j \in Z$ بحيث $i > j$ و$a^i = a^j$ ومنه:

ومنه $a^{i-j} = 1$ حيث $i - j > 1$وذلك لأن $a^{i-j}.a^j = a^i = a^j = 1.a^j$

$$i - j > 1 \Rightarrow i - j - 1 > 0$$

ومنه $a.a^{i-j-1} = 1$ وبالتالي a^{i-j-1} مقلوب العنصر a

2-**لتكن R حلقة و A مثالي يساري في R عندئذ:**

أ-اذا كان $1 \in A$ فإن $A = R$

ب-اذا وجد في A عنصر قابل للقلب من اليسار فإن $A = R$

البرهان:أ-لنفرض أن $1 \in A$ عندئذ أياً كان $a \in R$ فإن $a = a.1 \in A$ ومنه $R \subseteq A$ وبالتالي $A = R$

ب-ليكن $a \in A$ حيث a عنصر قابل للقلب من اليسار عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ ومنه $1 = ba \in A$ وهذا يؤدي الى ان $A = R$

3-**ليكن F حقلاً ،عندئذ F لا يحوي سوى مثاليتين اثنتين فقط هما المثالية الصفرية والحقل نفسه F**

البرهان: ليكن F حقلاً،و A مثالي في F ، اذا كان $A = 0$ يتم المطلوب

لنفرض $A \neq 0$ عندئذ يوجد في A عنصر $a \neq 0$ وبما أن العنصر a قابل للقلب (لأنه غير صفري في الحقل F) فإنه $A = F$

4-اذا كانت الحلقة R تحقق خاصية الأختصار فإن R حلقة تامة

البرهان:R تحقق خاصية الاختصاروليكن $a, b \in R$ بحيث $a.b = 0$ ولنفرض أن $a \neq 0$ عندئذ $ab = 0 = a.0$ وحسب الفرض بالاأختصار نجد $b = 0$ أي R لاتحوي قواسم الصفر ومنه R تامة.

5-اذا كانت R حلقة وكان $a^2 = a$ لكل $a \in R$ عندئذ تكون R تبديلية (تسمى بحلقة بول أو بوليانية)

البرهان: أ- ليكن $a \in R$ عندئذ $a + a \in R$ ومنه حسب الفرض نجد:

$$(a+a)^2 = a + a \Longrightarrow (a+a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \Longrightarrow (a+a) = a + a + a + a$$

ومنه $a + a = 0 \Longleftarrow a = -a \quad \forall a \in R$

ب-لكل $a, b \in R$ نجد أن:

$$(a+b)^2 = a + b \Longrightarrow a^2 + ab + ba + b^2 = (a+b) \Longrightarrow a + b = a + ab + ba + b$$

$$\Longrightarrow ab = ba = 0 \Longrightarrow ab = -ba$$

ولكن $-ba = ba$ – كما أثبتنا في البداية اذن $ab = ba$ فالحلقة تبديلية.

6-اذا كان A, B مثاليتين في الحلقة R تحققان $A \cap B = 0$ فإنه أيا كان $a \in A$, $b \in B$ فإن $a.b = 0$

البرهان: نعلم أن $A.B \subseteq A \cap B = 0$ ومنه فإن $A.B = 0$ اذا $a.b \in A.B = 0$ $a.b = 0$

7-اذا كان M, N مثاليتين في الحلقة R تحققان $M + N = R$ فإن: $M.N = M \cap N$.

البرهان: نعلم أن ① $M.N \subseteq M \cap N$ وذلك لأنه اذا كان $x \in M.N$ عندئذ $x = \sum a_i b_i$ حيث $a_i \in M, b_i \in N$ وهذا المجموع منته ومنه $x \in M$ و $x \in N$ وبالتالي $x \in M \cap N$

الاحتواء المعاكس: $1 \in R$ و $R = M + N$ ومنه يوجد $a \in M$, $b \in N$ حيث $a + b = 1$ وليكن $x \in M \cap N$ عندئذ:

$$x = x(a+b) = xa + xb = xa + bx \in M.N$$

ومنه ② $M \cap N \subseteq M.N$ من ① و ② نجد $M.N = M \cap N$

8-اذا كان Z_n $(n > 1)$ حقل ، فإن n يكون أولياً

البرهان: Z_n ايزومورفية مع $Z/_{nZ}$ وبالتالي nZ أعظمية في Z ومنه فهي أولية في Z ومنه n اولي.

9-اذا كانت الحلقة R واحدية وتبديلية فإن كل مثالية أعظمية في الحلقة R هي مثالية أولية.

البرهان:

$$\underbrace{M}_{\text{أعظمي}} \Longrightarrow \underbrace{R/_M}_{\text{حقل}} \Longrightarrow \underbrace{R/_M}_{\text{منطقة تكاملية}} \Longrightarrow \underbrace{M}_{\text{أولي}}$$

10-كل مثالية عديمة القوى في الحلقة R تكون عديمة

البرهان:B عديم القوى في R عندئذ يوجد $n \in N^*$ بحيث $B^n = 0$ من جهة أخرى :ليكن $b \in B$ عندئذ

$b^n = b.b.b.b \ldots . \in B^n = 0$ وهذا يبين ان كل عنصر من B هوعديم القوى ومنه B مثالية عديمة.

11- اذا كانت الحلقة R واحدية وتبديلية وA مثالية أولية في R فإن $rad\ A = A$

البرهان:لدينا $A \subseteq Rad\ A$ ، ليكن $x \in rad\ A$ عندئذ يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$ وبما أن A مثالية أولية في R فإن $x \in A$ ومنه $Rad\ A \subseteq A$ ومنه $Rad\ A = A$

12-Aمثالية يسارية من الحلقة R وعديمة القوى في R ،عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = 0$

البرهان: لنفرض أن المثالية اليسارية A عديمة القوى عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $a_1.a_2.a_3 \ldots\ldots a_n = 0$ وذلك أياً كان

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots, a_n \in A$ ليكن $x \in A^n$ عندئذ $x = \sum b_{i1}b_{i2}b_{i3}b_{i4} \ldots b_{in} = 0$ حيث $b_{ij} \in A$ لكل $1 \le j \le n$ ومنه $A^n = 0$

13-ان جذر جاكبسون $\mathfrak{J}(R)$ في الحلقة التبديلية والواحدية R هو مثالية صغيرة في R

البرهان:ليكن D مثالية يسارية في R يحقق $D + \mathfrak{J}(R) = R$ عندئذ يوجد $a \in D, r \in \mathfrak{J}(R)$ بحيث $1 = a + r$ ومنه $1 - a = r \in \mathfrak{J}(R)$ ومنه العنصر $1 - (1 - a) = a$ قابل للقلب من اليسار في R أي أن $1 \in D$ ومنه $D = R$ وهذا يبين أن المثالي $\mathfrak{J}(R)$ صغير في R.

14-اذا كانت R حلقة تبديلية ، $x \in R$ فأثبت أنه اذا كان $x \in Rad\ R$ فإن x يكون عديم القوى

البرهان:لنفرض أن $x \in Rad\ R$ ولنفرض جدلا ان العنصر x ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (اذا كانت R حلقة وليكن $x \in R$ عنصرا ليس عديم القوى عندئذ يوجد في R مثالي أولي لا يحوي العنصر x) ومنه يوجد مثالي أولي B في R حيث $x \notin B$ ومنه $x \in Rad\ R$ وهذا يناقض كون العنصر x ينتمي الى جميع المثاليات الأولية في R ومنه نجد أن العنصر x عديم القوى.

15-اذا كانت R منطقة تكاملية فإن العناصر الجامدة في R هي فقط 1 و 0

البرهان:لتكن R منطقة تكاملية وليكن $x \in R$ عنصر جامد في R عندئذ $x^2 = x$ ومنه $x(x - 1) = 0$ وحسب قانون الاختصار كونها منطقة تكاملية عندئذ يكون اما $x = 0$ أو $x = 1$.

16-لتكن R حلقة واحدية عندئذ اذا كانت $A \neq R$ مثالية يسارية من R ،فإنه توجد في R مثالية يسارية أعظمية تحوي A

البرهان: لنأخذ المجموعة : $L = \{B : R$ مثالي يساري في $B , A \subseteq B \neq R\}$ عندئذ المجموعة $L \neq \emptyset$ لأن $A \in L$ كما أن L مرتبة جزئيا وفق علاقة الاحتواء

لتكن L_0 مجموعة جزئية من L غير خالية ومرتبة كليا ومنه نجد أن $K = \bigcup_{B \in L_0} B$ مثالي يساري في R وأن $A \subseteq K \neq R$ ومنه فإن K يمثل حدا أعلى للمجموعة L_0 في L وحسب زورن يوجد في L عنصر أعظمي وليكن M ومنه نجد أن M مثالي يساري أعظمي في R ويحقق $A \subseteq M$

17-حلقة الاعداد الصحيحة Z هي حلقة إقليدية

البرهان: أ- Z منطقة تكاملية ب- العلاقة $\varphi: Z^* \longrightarrow N \; ; \; \varphi(m) = |m|; \forall m \in Z^*$ هو تطبيق ويحقق ايا كان $m, n \in Z^*$ حيث n يقسم m فإن :

$$m > n \Longrightarrow |m| > |n| \Longrightarrow \varphi(m) > \varphi(n)$$

ج- n و m يحققان خوارزمية القسمة

$$\exists \underbrace{q}_{\text{ناتج القسمة}} , \underbrace{r}_{\text{باقي القسمة}} \in Z \, ; m = qn + r \Longrightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ اما} \\ |r| < |q| \text{ او} \end{cases} \Longrightarrow \varphi(r) < \varphi(q)$$

18-لأجل أي حلقة R فإن $rad\, R \subseteq \mathfrak{J}(R)$

البرهان: ليكن $a \in rad\, R$ عندئذ يكون العنصر a عديم القوى وبالتالي يوجد $n \in N^*$ بحيث $a^n = 0$

ليكن M مثالي أعظمي في R عندئذ يكون $a^n \in M$ وبما ان المثالي M أولي ينتج أن $a \in M$ وهذا يبين أن a ينتمي الى جميع المثاليات الاعظمية في R وبالتالي $a \in \mathfrak{J}(R)$ ونجد منه $rad\, R \subseteq \mathfrak{J}(R)$.

19-اذا كانت B و A مثاليتين صغيرتين في الحلقة R بحيث $A \subseteq B$ اذا كانت B صغيرة في R فإن المثالية A تكون صغيرة في R

البرهان: بفرض أن B مثالي صغير في R وليكن K مثالي يساري في R يحقق $A + K = R$ عندئذ:

$R = A + K \subseteq B + K \subseteq R$ ومنه $B + K = R$ بما أن B صغير فإن $K = R$ وبالتالي يكون A مثالي يساري صغير في R.

20-كل مثالية يسارية عديمة A تكون محتواة في أساس جاكبسون $\mathfrak{J}(R)$

البرهان: لتكن A مثالية عديمة في R، وليكن $a \in A$ عندئذ حسب تعريف المثالية العديمة يوجد $n \in N^*$ يحقق $a^n = 0$ ومنه يكون $(1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots..+a^n) = 1$ أي $(1-a)$ قابل للقلب من اليمين وبما أن:

$(1+a+a^2+a^3+\cdots..+a^n)(1-a) = 1$ فإن $(1-a)$ قابل للقلب من اليسار أي $(1-a)$ قابل للقلب في R ومنه $A \subseteq \mathfrak{J}(R)$

21-ان أساس جاكبسون $\mathfrak{J}(R)$ موجود في الحلقة R ولا يساوي الحلقة R وهو اكبر مثالية يسارية صغيرة في الحلقة R

البرهان: في كل حلقة يوجد مثالية أعظمية واحدة على الأقل $\neq R$ ومنه $\mathfrak{J}(R) \neq R$ وهو تقاطع جميع المثاليات الأعظمية في الحلقة R.

$\mathfrak{J}(R)$ مثالية يسارية صغيرة في R لانه لو كانت D مثالية يسارية في R تحقق $D + \mathfrak{J}(R) = R$ يوجد $x \in \mathfrak{J}(R)$ و $a \in D$ بحيث $a + x = 1$ ومنه $1 - a = x \in \mathfrak{J}(R)$ أي أن $a = 1-(1-a)$ قابل للقلب من اليسار في R ومنه $1 \in D$ أي $D = R$ و $\mathfrak{J}(R)$ صغيرة في R وبما أن كل مثالية صغيرة في R محتواة في $\mathfrak{J}(R)$ فإن $\mathfrak{J}(R)$ أكبر مثالية صغيرة في R.

22-ان كل عنصر من الحلقة R وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي الى أحد المثاليات اليسارية الاعظمية في R

البرهان: ليكن $a \in R$ غير قابل للقلب من اليسار عندئذ $Ra \neq R$ ولأنه اذا كان $Ra = R$ فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $b.a = 1$ وهذا يعني أن العنصر a قابل للقلب من اليسار في R وبما أن Ra مثالية يسارية في R فإنه توجد مثالية أعظمية M في R تحوي Ra ومنه $a \in Ra \subset M$.

23-R حلقة ، و $a \neq 0 \in R$ جامد عندئذ العنصر a ليس عديم القوى

البرهان: بما أن a جامد عندئذ $a^2 = a$ ومنه بالاستقراء الرياضي نجد $a^n = a$ لو كان a عديم القوى لوجد $m \in Z^*$ بحيث $a^m = 0$ ولكن $a = a^m = 0$ وهذا يناقض كون $a \neq 0$ وبالتالي a ليست عديمة القوى.

24- برهن أن $rad(rad\ A) = rad\ A$

البرهان: نعلم أن ① $rad\ A \subseteq rad(rad\ A)$ ليكن $a \in rad(rad\ A)$ عندئذ يوجد $t \in N^*$ بحيث $a^t \in radA$ وحسب التعريف يوجد $s \in N^*$ بحيث $(a^t)^s \in A$ ومنه نجد أن $a \in rad\ A$ ومنه :

② $rad(rad\ A) \subseteq rad\ A$ من ① و ② تنتج المساواة.

مبرهنات التماثل

للفهم فقط: لتكن العلاقة $f: \underbrace{R}_{\text{منطلق}} \longrightarrow \underbrace{S}_{\text{مستقر}}$

1-نثبت أن العلاقة f معرفة جيداً(أو تطبيق) وذلك بأخذ عنصرين من المنطلق $x, y \in R$ ويجب أن يكون:

$$\boxed{x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)}$$

2-نثبت أن f تشاكل حلقي وذلك بتحقق:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) f(x+y) = f(x) + f(y) & \\ 2) f(x.y) = f(x).f(y) & \forall \underbrace{x, y \in R}_{\text{منطلق}} \\ 3) f(1) = 1 & \end{array}}$$

3-نثبت أن f غامر : نأخذ عنصر من المستقر S عندئذ يوجد عنصر من المنطلق R تكون صورته هي العنصر من المستقر أي : $\boxed{\forall s \in S \Longrightarrow \exists r \in R \,; s = f(r)}$

4-نثبت أن f متباين : وذلك بأخذ عنصرين من المنطلق $x, y \in R$ ويجب أن يكون:

$$\boxed{f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y}$$

نستخدم 1و2و3و4 لأثبات التماثل $\cong$

مبرهنة: لتكن S وR حلقتين واحديتين ، وليكن $f: R \longrightarrow S$ هومورفيزما حلقيا . أثبت أن:

1-اذا كانت A مثالية يسارية في R وكان f غامرا فإن $f(A)$ مثالية يسارية في S

2-اذا كان f غامرا فإن $f(1_R) = 1_S$

3-اذا كانت B وA مثاليتين في R بحيث $B \subseteq A$ فإن : $\dfrac{R/B}{A/B} \cong R/A$

4-$\ker f$ مثالية في R

5-$R/\ker f \cong Im\, f$ ثم برهن اذا كان f غامرا فإن $R/\ker f \cong S$

البرهان1: لتكن A مثالية يسارية في R ولنفرض أن التطبيق غامر وليكن $x, y \in f(A)$ عندئذ يوجد $a, b \in A$ حيث

$x = f(a)$ و $y = f(b)$ ومنه:

$$x - y = f(a) - f(b) = f(a - b) \in f(A)$$

ليكن $s \in S$ عندئذ يوجد $r \in R$ حيث $s = f(r)$ ومنه:

$$s.x = f(r).f(a) = f(r.a) \in f(A)$$

ومنه $f(A)$ مثالية يسارية في S.

برهان2:بما أن $1_R \in R$ و $1_S \in S$ فيوجد $x \in R$ بحيث $f(x) = 1_S$ ومن جهة أخرى يوجد عنصر $y \in S$ بحيث $f(1_R) = y$

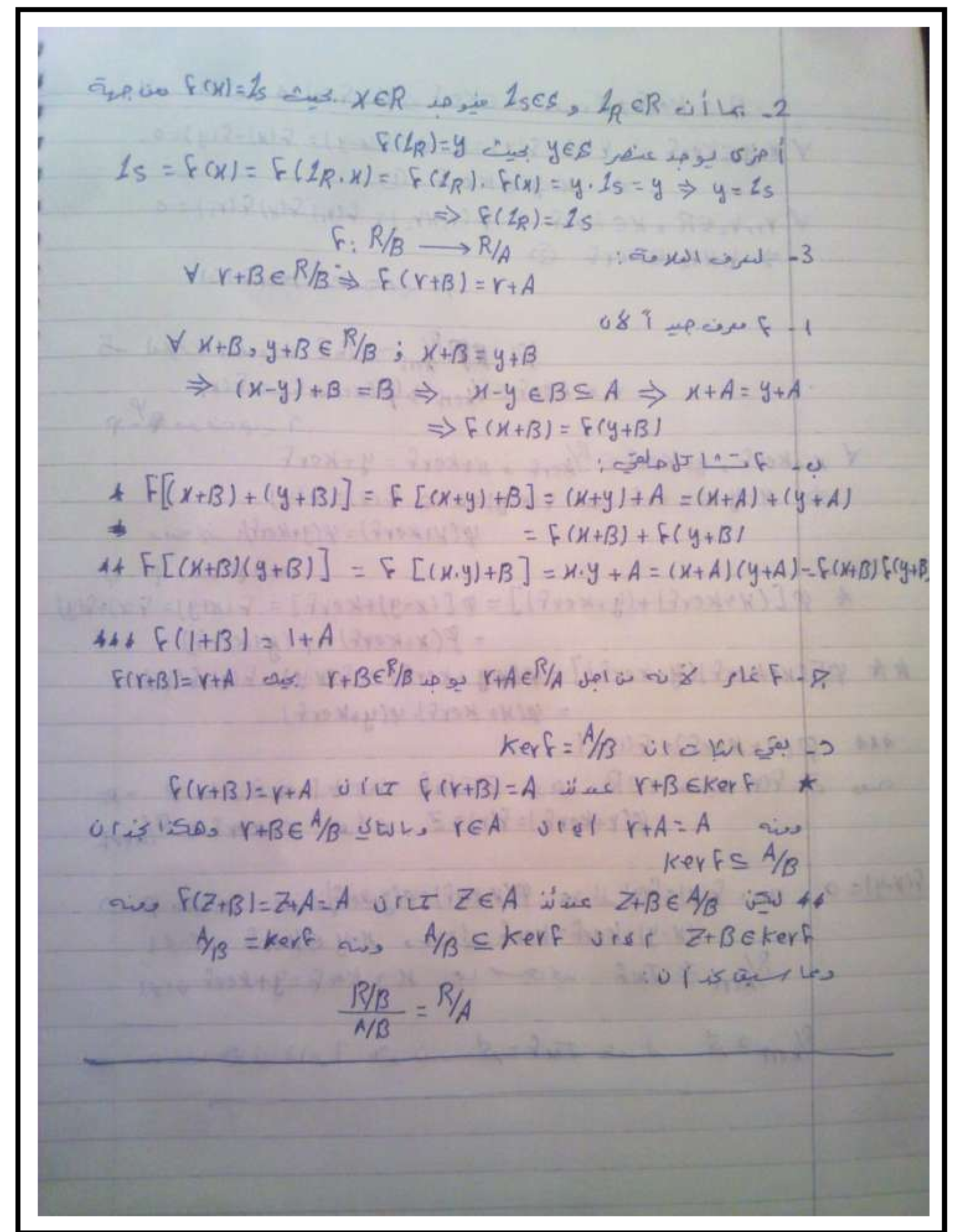
$$1_S = f(x) = f(1_R.x) = f(1_R).f(x) = y.1_S = y \implies y = 1_S \implies f(1_R) = 1_S$$

برهان3: لنعرف العلاقة

$$f: {}^{R}/_{B} \longrightarrow {}^{R}/_{A}$$

$$r + B \in {}^{R}/_{B} \Longrightarrow f(r + B) = r + A$$

يتبع بصورتين كفاية البرهان ونعتذر عن كتابتها لضيق الوقت



2- بما أن $1_R \in R$ و $1_S \in S$ فيوجد $x \in R$ بحيث $f(x)=1_S$ من جهة أخرى يوجد عنصر $y \in S$ بحيث $f(1_R)=y$

$$1_S = f(x) = f(1_R . x) = f(1_R) . f(x) = y . 1_S = y \Rightarrow y = 1_S$$

$$\Rightarrow f(1_R) = 1_S$$

3- لنعرف العلاقة: $f : R/B \longrightarrow R/A$

$$\forall\ r+B \in R/B \Rightarrow f(r+B) = r+A$$

أ- f معرف جيد ؟ لأن

$$\forall\ x+B , y+B \in R/B \ ;\ x+B = y+B$$

$$\Rightarrow (x-y)+B = B \Rightarrow x-y \in B \subseteq A \Rightarrow x+A = y+A$$

$$\Rightarrow f(x+B) = f(y+B)$$

ب- f تشاكل حلقي:

* $f[(x+B)+(y+B)] = f[(x+y)+B] = (x+y)+A = (x+A)+(y+A)$
$= f(x+B) + f(y+B)$

** $f[(x+B)(y+B)] = f[(x.y)+B] = x.y + A = (x+A)(y+A) = f(x+B)f(y+B)$

*** $f(1+B) = 1+A$

ج- f غامر لأنه من أجل $r+A \in R/A$ يوجد $r+B \in R/B$ بحيث $f(r+B) = r+A$

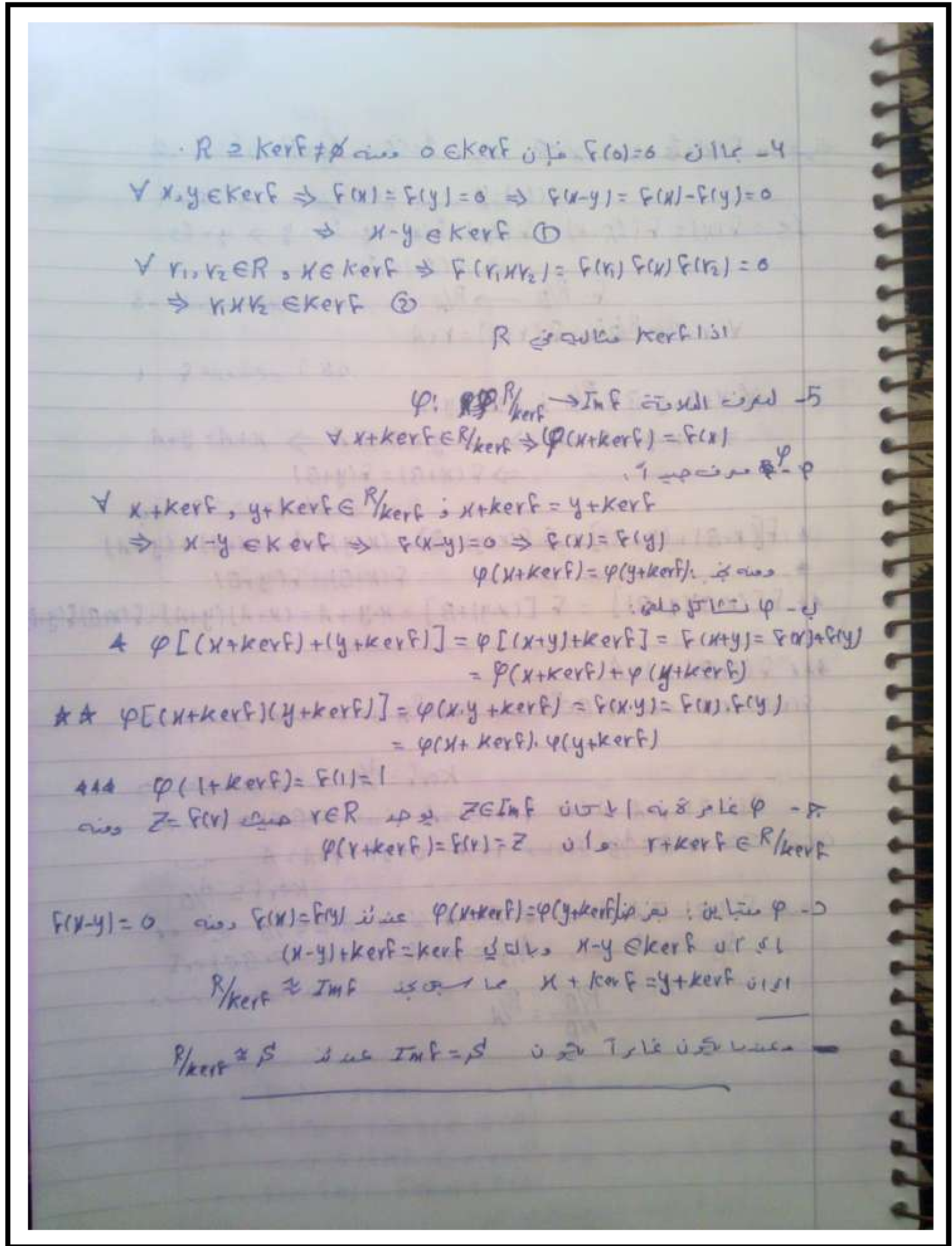
د- بقي اثبات أن $\ker f = A/B$

* $r+B \in \ker f$ عندئذ $f(r+B) = A$ لكن $f(r+B) = r+A$ ومنه $r+A = A$ أي أن $r \in A$ وبالتالي $r+B \in A/B$ وهكذا نجد أن $\ker f \subseteq A/B$

** ليكن $z+B \in A/B$ عندئذ $z \in A$ لكن $f(z+B) = z+A = A$ ومنه $z+B \in \ker f$ أي أن $A/B \subseteq \ker f$ ومنه $A/B = \ker f$

ومما سبق نجد أن:

$$\frac{R/B}{A/B} = R/A$$



4- بما أن $f(0)=0$ فإن $0 \in \ker f$ ومنه $R \supseteq \ker f \neq \emptyset$.

$\forall x,y \in \ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=0 \Rightarrow f(x-y)=f(x)-f(y)=0$

$\Rightarrow x-y \in \ker f$ ①

$\forall r_1,r_2 \in R ,\ x \in \ker f \Rightarrow f(r_1 x r_2)=f(r_1)f(x)f(r_2)=0$

$\Rightarrow r_1 x r_2 \in \ker f$ ②

إذاً $\ker f$ مثالي في R

5- لنعرف التطبيق $\varphi : R/\ker f \to \operatorname{Im} f$

$\forall x+\ker f \in R/\ker f \Rightarrow \varphi(x+\ker f)=f(x)$

أ- φ معرف جيداً:

$\forall x+\ker f ,\ y+\ker f \in R/\ker f ;\ x+\ker f = y+\ker f$

$\Rightarrow x-y \in \ker f \Rightarrow f(x-y)=0 \Rightarrow f(x)=f(y)$

ومنه نجد $\varphi(x+\ker f)=\varphi(y+\ker f)$.

ب- φ تشاكل حلقي:

* $\varphi[(x+\ker f)+(y+\ker f)] = \varphi[(x+y)+\ker f] = f(x+y) = f(x)+f(y)$
$= \varphi(x+\ker f)+\varphi(y+\ker f)$

** $\varphi[(x+\ker f)(y+\ker f)] = \varphi(x \cdot y+\ker f) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
$= \varphi(x+\ker f) \cdot \varphi(y+\ker f)$

*** $\varphi(1+\ker f) = f(1) = 1$

ج- φ غامر لأنه أياً كان $z \in \operatorname{Im} f$ يوجد $r \in R$ حيث $z=f(r)$ ومنه $r+\ker f \in R/\ker f$ وأن $\varphi(r+\ker f)=f(r)=z$

د- φ متباين: ليكن $\varphi(x+\ker f)=\varphi(y+\ker f)$ عندئذ $f(x)=f(y)$ ومنه $f(x-y)=0$

أي أن $x-y \in \ker f$ وبالتالي $(x-y)+\ker f=\ker f$

إذاً $x+\ker f=y+\ker f$ مما سبق نجد $R/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

— عندما يكون غامراً يكون $\operatorname{Im} f = S$ عندئذ $R/\ker f \cong S$